613. D'Amore B. (2007). Epistemologia, didattica della matematica e pratiche d'insegnamento. *La matematica e la sua didattica*. Vol. 21, n° 3. 347-369. ISSN: 1120-9968.

Epistemologia, didattica della matematica e pratiche di insegnamento

Bruno D'Amore
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia
Facoltà di Scienza della Formazione, Università di Bolzano, Italia
Alta Scuola Pedagogica, Locarno, Svizzera
Scuola di dottorato di ricerca, Università Distrital di Bogotà, Colombia
damore@dm.unibo.it – www.dm.unibo.it/rsddm

Summary. *With this article we intend to give a contribution to a unitary picture of various terms and concepts, spread in the international community of those who deal with mathematics education, giving them back unity and looking for the historical roots of their introduction in that community. Although the different acceptation with which they appear today, many of these terms were introduced from the origin mainly by Guy Brousseau, striving for synthesis and ad hoc redefinition. They evolved in time and some these evolutions regard the most classical topics; we focus our attention on the example relative to the didactic contract.*

Resumen. *Con este artículo se quiere contribuir a dar una visión unitaria de varios términos y conceptos difusos en la comunidad internacional de quien se ocupa de didáctica de la matemática, restituyéndoles unitariedad y buscando las raíces históricas de su ingreso en dicha comunidad. Aún en sus diversas acepciones en las cuales hoy se usan, muchos de estos términos fueron introducidos desde sus orígenes gracias a la obra de Guy Brousseau, con un esfuerzo de síntesis y de redefinición ad hoc. Estos han evolucionado en el tiempo y algunas de dichas evoluciones atañen los temas clásicos; aquí nos limitamos al ejemplo relativo al contrato didáctico.*

Sunto. *Con questo articolo si intende dare un contributo ad una visione unitaria di vari termini e concetti oramai diffusi nella comunità internazionale di chi si occupa di didattica della matematica, restituendo loro unitarietà e cercando le radici storiche del loro inserimento in tale comunità. Pur nelle diverse accezioni con cui oggi compaiono, molti di questi termini furono* *introdotti fin dalle origini, principalmente ad opera di Guy Brousseau, con uno sforzo di sintesi e di ridefinizione ad hoc. Essi si sono evoluti nel tempo ed alcune di tali evoluzioni riguardano i temi più classici; qui ci si limita all'esempio relativo al contratto didattico.*

Resumo. *Com este artigo pretendemos fornecer uma contribuição para uma visão unitária de vários termos e conceitos já tão difundidos na comunidade internacional daqueles que trabalham com didática da matemática, restituindo-lhes unidade e procurando as raízes históricas de sua inserção nessa comunidade. Apesar das diferentes acepções com que aparecem hoje em dia, muitos desses termos foram introduzidos, desde sua origem, principalmente por Guy Brousseau, graças a um esforço de síntese e de redefinição ad hoc. Tais termos evoluíram no tempo e algumas dessas evoluções são relativas aos temas mais clássicos; aqui limitamo-nos ao exemplo relativo ao contrato didático.*

Résumé. *Cet article veut donner une contribution dans la direction d'une uniformisation des termes et des concepts très diffusés dans la communauté internationale de la didactique des mathématiques, en leur donnant ainsi unitarité et en même temps en recherchant leurs racines historiques de leur insertion dans cette communauté. Une bonne partie de ces termes ont été introduits, avec la même signification d'aujourd'hui, par Guy Brousseau, grace à un effort de synthèse et de redéfinition ad hoc. Dans le temps, certains d'entre eux, concernant les thèmes les plus classiques, ont évolué; dans cet article on se borne à l'exemple relatif au contract didactique.*

Zusammenfassung. *Dieser Artikel will sein Beitrag im Sinne der Standardisierung der Begriffe und der Konzepte geben, die in der internationalen Gemeinschaft der Didaktik der Mathematik sehr verbreitet sind. So gibt man ihnen Einheitlichkeit und gleichzeitig versucht man die historischen Wurzeln ihrer Einfügung in dieser Gemeinschaft. Viele dieser Begriffe waren mit der heutigen Bedeutung von Guy Brousseau eingeführt, dank einer seltsamen Anstrengung von Synthese und Neudefinierung. In der Zeit einige unter ihnen, die die klassischeren Themen betreffen, haben sich entwickelt; in diesem Artikel beschränkt man auf das Beispiel des didaktischen Vertrags.*

1. Epistemologia, conoscenza e convinzioni

Il termine "epistemologia" è entrato a far parte della didattica della matematica fin dagli anni '60, portando con sé le differenti accezioni che l'accompagnano e che conducono a diverse "definizioni" ed interpretazioni nei vari Paesi del mondo ed in molteplici situazioni.

Mentre rinvio a Brousseau (2006a, b) per un'analisi critica comparata di tale termine e delle sue diverse occorrenze, avviso subito che mi riferirò, anche quando non lo dirò esplicitamente, a questi due recenti lavori di Brousseau ed a molti suoi altri, citati tutti in bibliografia. Alcune delle frasi che seguono sono liberamente tratte da questi testi, senza mutarne lo spirito. Per non appesantire il testo, non starò sempre a citare esplicitamente il lavoro di Brousseau cui mi riferisco di volta in volta.
Nel nostro campo di indagine:
una *concezione epistemologica* è un insieme di convinzioni, di conoscenze e di saperi scientifici, che tendono a dire che cosa sono le conoscenze dei singoli o di gruppi di persone, il loro funzionamento, i modi per stabilire la loro validità, di acquisirle e quindi di insegnarle e di apprenderle;
l'*epistemologia* è un tentativo di identificare e di unificare concezioni epistemologiche diverse relative a determinate scienze, a movimenti di pensiero, a gruppi di persone, a istituzioni o a culture.
Per alcuni di questi termini, seguiamo le definizioni date in D'Amore, Fandiño Pinilla (2004):

- *convinzione* (belief) (o credenza): opinione, insieme di giudizi e di attese, quel che si pensa a proposito di qualcosa;
- l'insieme delle convinzioni di qualcuno (A) su qualcosa (T) dà la *concezione* (K) di A relativamente a T; se A appartiene ad un gruppo sociale (S) e condivide con gli altri appartenenti ad S quell'insieme di convinzioni relativamente a T, allora K è la concezione di S relativamente a T. Spesso, in luogo di "concezione di A relativamente a T" si parla di "immagine che A ha di T".

Per altri termini, attingiamo a enciclopedie o a manuali attendibili:
per *sapere* intendiamo un insieme di conoscenze o di atteggiamenti riproducibili, acquisiti attraverso lo studio o l'esperienza.
Nell'ambito della psicologia cognitiva si distinguono i *saperi* dalle conoscenze:
i saperi sono dei dati, dei concetti, delle procedure o dei metodi che esistono al di fuori di ogni soggetto che conosce e che sono generalmente codificati in opere di riferimento, manuali, enciclopedie, dizionari;
le conoscenze sono indissociabili da un soggetto conoscente; non esiste cioè una conoscenza a-personale; una persona che interiorizza un sapere *prendendone coscienza*, trasforma questo sapere in conoscenza.

Torniamo ora al discorso didattico; esso è ampio e può trarre origine da varie radici, una delle quali ha sede nel dibattito tra

Didattica e pedagogia

La *grande didattica* di Comenius è stata dura a morire: «un metodo unico basta per insegnare tutte le materie… le arti , le scienze e le lingue» (Comenius, 1657).

Ci sono voluti secoli per arrivare a stabilire in modo definitivo che le didattiche possono essere, sono, specifiche; il che è servito alla didattica (generale) a liberarsi dal giogo della pedagogia ed alle didattiche specifiche (disciplinari) ad assumere uno status a sé.[1]

Analogamente alla direzione che abbiamo voluto dare poco sopra alla epistemologia, possiamo dire che la didattica di una conoscenza (di un oggetto, di un fatto, di una disciplina…) può allora essere ridefinita come un progetto sociale di far acquisire questa conoscenza attraverso un organismo.

È in queste condizioni "sociali" che si preme evidenziare alcune possibili peculiarità della

Didattica della matematica

1. La didattica della matematica (che noi consideriamo come un aspetto della più generale educazione matematica) è l'arte di concepire e di condurre condizioni che possono determinare l'apprendimento di una conoscenza matematica da parte di un soggetto (che può essere un qualsiasi organismo impegnato in tale attività: una persona, una istituzione, un sistema, perfino un animale).[2] L'apprendimento viene qui inteso come un insieme di modifiche di comportamenti (dunque di prestazioni) che segnalano, ad un osservatore predeterminato, secondo soggetto in gioco, che questo primo soggetto dispone di una conoscenza (o di una competenza)[3] o di un insieme di conoscenze (o di competenze), il che comporta la gestione di diverse rappresentazioni, la creazione di

---

[1] Eppure, ancora tanto si potrebbe trarre da questa opera, non del tutto esplorata dai moderni critici. Mi riprometto di farlo.

[2] In questo testo, *arte* va inteso come la traduzione del latino *ars*, cioè un insieme difficilmente distinguibile tra gli attuali termini *arte* e *artigianato*; *artista* era, nell'accezione latina, qualsiasi artista (nel senso moderno del termine) ma anche qualsiasi artigiano; anzi, nel mondo latino queste due figure confluivano in una sola e non c'era possibilità di distinzione.

[3] Sulla distinzione tra conoscenza e competenza, si veda D'Amore, Godino, Arrigo, Fandiño Pinilla (2003).

specifiche convinzioni, l’uso di diversi linguaggi, il dominio di un insieme di repertori di riferimenti idonei, di prove, di giustificazioni o di obblighi. Queste condizioni devono poter essere messe in opera e riprodotte intenzionalmente. Si parla in questo caso di pratiche didattiche.[4]

2. Queste pratiche didattiche sono esse stesse “condizioni” e dunque a loro volta oggetto di studio. La didattica si presenta allora come lo studio di tali condizioni, sotto forma di progetti e di effettive realizzazioni.

3. Gli studi scientifici – di tipo sperimentale – in questo campo necessitano dell’esplicitazione di concetti e metodi che devono essere sottoposti ad esigenze di verifiche di coerenza e di adeguatezza alla specifica contingenza. Certe teorie, come per esempio la teoria delle situazioni didattiche, hanno per oggetto dire che cosa studia la didattica.

Tra gli oggetti di studio della didattica, un ruolo assolutamente fondamentale ma talvolta sottointeso spetta al

***Milieu* (ambiente, mezzo)**

Dalla teoria delle situazioni sappiamo che l’insegnante deve suscitare nell’allievo comportamenti che l’allievo stesso, per manifestare la sua conoscenza, dovrebbe assumere autonomamente. Sembra un paradosso. Anzi: è un paradosso. L’unica soluzione consiste nel coinvolgere un terzo elemento, il *milieu*, e fare in modo che la risposta dell’allievo sia esclusivamente riferita alle necessità del *milieu*, che l’insegnante conosce bene, o da lui predisposte all’uopo. L’arte dell’insegnante sta allora nell’organizzazione di una relazione tra allievo e *milieu*, che:

- da una parte, lascia una ragionevole incertezza che le conoscenze del soggetto deve ridurre;
- dall’altra parte, fa in modo che tale riduzione possa davvero avvenire, cioè con un grado di incertezza limitato, dal punto di vista dell’insegnante.

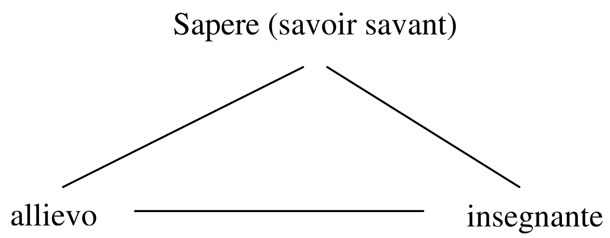
Da qui si capisce il ruolo del *milieu*, fondamentale per capire il funzionamento della

Teoria delle situazioni matematiche

La *teoria delle situazioni matematiche* (situazioni a-didattiche) ha per oggetto di definire le condizioni nelle quali un soggetto è condotto a “fare” matematica, a utilizzarla o a inventarla senza l’influenza di condizioni didattiche specifiche determinate ed esplicitate

[4] Sul tema delle pratiche, si veda D’Amore (2005) e D’Amore, Godino (2006).

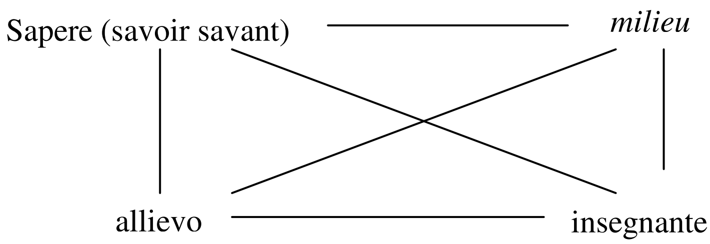
dall'insegnante.
Essa mira alla creazione, all'organizzazione e all'uso di problemi che conducono alla costruzione di concetti e di teorie matematiche da parte di un soggetto con alcune proprietà e conoscenze minime, tali da rendere abbastanza probabile lo svolgimento del processo determinato dalla situazione.
In base ai due ultimi punti, le *situazioni* si possono pensare come sistemi di interazione di uno o più soggetti con un *milieu*, soggetti che necessitano di una conoscenza previa per poter agire.
Gli elementi della teoria sono definiti in base alla loro funzione in una situazione. Ciò è analogo al metodo per lo più utilizzato in matematica, secondo il quale un oggetto è definito in base a relazioni con altri oggetti (assiomi o definizioni).
Così, un *evento didattico* diventa un insieme di fatti interpretabili dall'evoluzione di una situazione didattica. Tale interpretazione è uno degli scopi della didattica della matematica; essa porta alla concezione di *microdidattica* intesa come lo studio delle condizioni di diffusione o di scambi di conoscenze (per esempio tramite lezioni), fra persone, organizzazioni sociali, economiche o culturali.
Per rappresentare schematicamente questa situazione, si è fatto ricorso, nella storia recente, a vari schemi che Brousseau chiama
"Poligoni" della didattica
Il più famoso e citato è il *triangolo della didattica*:[5]



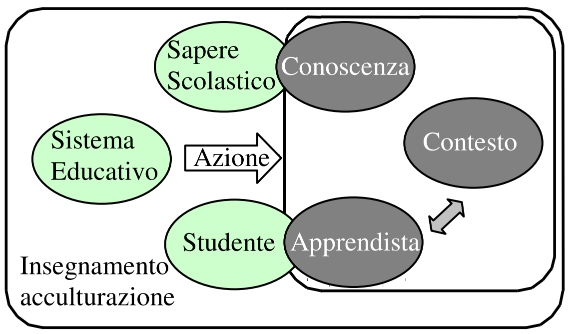
Ma in tale schema non appare il *milieu*, il che rivela la sua insufficienza. Introducendo questo nuovo "vertice", si può passare ad un *quadrilatero*

[5] Un'analisi critica e costruttiva del triangolo della didattica si trova in D'Amore, Fandiño Pinilla (2002).

della didattica:



Anche questo schema rivela la sua insufficienza, non appena si consideri che in esso non si evidenzia la differenza fra i "saperi" scolastici, da insegnare o insegnati, e le "conoscenze" dell'allievo, che non coincidono tra loro e che funzionano secondo modalità diverse; inoltre, anche le peculiarità delle attività del soggetto che apprende sono diverse, il che porta ad avere quanto meno un "esagono della didattica", reso da Guy Brousseau in questo schema che evidenzia il suo significato funzionale.



Nel futuro, dovremo sempre più entrare in profondità nell'analisi di questo schema e dei suoi impliciti significati relazionali. E usarlo per studiare gli eventi didattici in aula.
Prima di passare al significato di "risultato di ricerca in didattica della matematica" e, finalmente, ad esempi di contratto didattico, voglio sottolineare come i rapporti tra didattica ed epistemologia si rivelano solo durante l'effettuazione di una ricerca, in casi specifici ed esemplari.

2. Ostacoli epistemologici: un esempio storico che ha cambiato il volto della didattica

È ben noto che Guy Brousseau ha studiato per quasi tre decenni (dai primi anni '60 a tutti gli '80) come si imparano i numeri naturali e la loro struttura. Per tutti gli anni '60 (e, in taluni casi, anche dopo) dominavano certe idee che oggi troviamo curiose, basate su diverse "teorie", sull'apprendimento dei numeri naturali da parte dei bambini dell'inizio di scuola primaria. Per esempio, era ritenuto ovvio che vi fosse una necessità apprenditiva di procedere nell'apprendimento orale e scritto dei numeri naturali secondo la scansione della successione ordinale, prima 1, poi 2, poi 3 e così via. Si insisteva allora in maniera massiccia sull'uso di materiali pre-costituiti basati su questa supposta necessità e che dunque la rinforzavano.
Credo sia ben noto che Brousseau *dimostrò* ampiamente come ciò fosse assolutamente falso e come l'apprendimento dei naturali avvenga "a salti". Credo sia ben noto il suo studio antropologico ed epistemologico sulle scritture dei numeri, paragonando tre sistemi diversi: quello (1) cosiddetto "di Robinson Crusoe" (una tacca per ogni unità, con uno spazio → tra le singole tacche), quello (2) degli antichi Romani, quello (3) di certi materiali strutturati preconfezionati all'uopo, con quello posizionale a base dieci indiano-arabo attuale.
Egli introdusse l'idea di "zone di miglior efficacia" per mostrare come esistono intervalli numerici nei quali un sistema di scrittura è più efficace di un altro. Per esempio, per l'intervallo 1-3, il metodo di Robinson è più efficace della scrittura romana e della nostra numerazione decimale (sia per l'uso che per l'apprendimento). Sull'intervallo 100-1000, l'ordine è inverso. Proseguendo su questa strada e studiando altri intervalli intermedi, Brousseau giunse a suggerire un "apprendimento per salti" che propose fin dal 1965 in un libro destinato alla scuola primaria pubblicato da Dunod (Brousseau, 1965). Tale apprendimento può avvenire "per invenzione", com'è tipico delle situazioni a-didattiche.
Lo studio proseguì con l'apprendimento delle operazioni, ma il metodo poteva estendersi allo studio dell'apprendimento di un algoritmo e a quello di una teoria matematica. E, da qui, a quello di ogni conoscenza…
I salti di complessità "informazionali" sono dunque più frequenti e meglio giustificati nella scoperta matematica, rispetto alla progressione

passo a passo. D’altra parte, gli allievi incontrano parecchie difficoltà nelle zone di transizione tra certi intervalli numerici. Questi due indizi portarono Brousseau all’ipotesi secondo la quale il fenomeno dei salti era generale, almeno in matematica, e che la sua analisi doveva essere la base di ogni ingegneria didattica.
Questa idea fu esposta nel 1976: trent’anni fa!
Furono questi tipi di studi che portarono, in opposizione a quanto dichiarava Gaston Bachelard (1938) a proposito dell’inesistenza in matematica degli ostacoli epistemologici, a far approdare invece questo concetto in seno alla ricerca didattica. La comprensione dei numeri naturali esige, per esempio, un certo modo di concepire questi numeri e le loro operazioni: un numero naturale come 4 ha un successivo, il suo prodotto per un altro numero naturale sarà più grande di esso eccetera. Alcune di queste proprietà diventano errate quando 4 diventa un numero razionale: per esempio, non ha più il successivo. Ma lo studente non si dà conto di questo passaggio e continua a “forzare” le proprietà di N anche Q; è per questo che si trovano studenti che asseriscono, in Q, che 2,33 è il successivo di 2,32, aiutati in ciò perfino da alcuni libri di testo. Inoltre, per esempio, $0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56$ è più piccolo di ciascuno dei fattori, novità sconcertante che mette in crisi la conoscenza precedentemente acquisita.
Lo studente, dicevo, quasi non si accorge di questa trasformazione di sapere. L’insegnante chiama “moltiplicazione” o “divisione” nuove operazioni che vorrebbe che gli allievi “riconoscessero” e assimilassero alle precedenti. La conoscenza dei numeri naturali è indispensabile per acquisire quella dei razionali ma, nello stesso tempo, è un ostacolo a questa acquisizione. Questo fenomeno crea malintesi e difficoltà importanti e invisibili poiché l’ostacolo si nasconde all’interno di un sapere che funziona ma che è “locale” e non generalizzabile all’oggetto matematico che si dovrebbe apprendere.
Questo è il senso stesso dell’idea di *ostacolo epistemologico*.
Resta ora da chiarire bene che cosa intendere dunque con

“Risultati” delle ricerche in didattica della matematica

Quelli che noi chiamiamo “risultati”, sono, secondo Brousseau, principalmente di due tipologie:

- affermazioni (non contraddette) su un campo di esperienze abbastanza vasto;
- rifiuto di convinzioni contraddette dalle esperienze.

Esempi di risultati del primo tipo:
1. La conoscenza che un soggetto può avere di un determinato sapere matematico dipende dalle circostanze nelle quali ha avuto l'occasione di utilizzarlo; questo è un assioma fondatore della teoria delle situazioni didattiche che non è mai stato contraddetto.
2. È possibile insegnare la matematica in modo relativamente diretto con un senso implicito corretto, e limitare così la trasposizione didattica.
3. È possibile determinare condizioni ragionevolmente riproducibili dell'*uso* e dell'*acquisizione* delle conoscenze matematiche sotto forma di sistemi (le "situazioni"); è anche relativamente possibile determinare condizioni (diverse) ragionevolmente riproducibili del loro *insegnamento*.
4. È possibile comunicare queste condizioni agli insegnanti. È preferibile, da tanti punti di vista, comunicare loro le situazioni piuttosto che algoritmi chiusi o indicazioni troppo generali. Questo ultimo punto ha varie ripercussioni sociali.
Esempi di risultati del secondo genere.
1. L'idea che la storia individuale di un soggetto che apprende sia esprimibile in termini di aggiunta successiva di conoscenze definitive, dall'infanzia all'università, è un'approssimazione grossolana. Presa alla lettera genera equivoci, decisioni fallaci e insuccessi. Le concezioni risultano limitate e deformate, in modo spesso nascosto. Sono indispensabili delle riprese e delle riorganizzazioni del sapere matematico, anche quando tale sapere sembra acquisito.
2. Il costruttivismo radicale è una teoria appropriata per le situazioni a-didattiche, ma inappropriata per le situazioni didattiche. L'istituzionalizzazione delle conoscenze è una tappa indispensabile dell'apprendimento, è costitutiva del sapere in rapporto alle conoscenze.
3. Le attuali descrizioni delle conoscenze matematiche degli allievi (in senso amministrativo e popolare) sono inappropriate. Queste descrizioni conducono genitori, insegnanti ed amministratori a sottostimare i risultati dell'attività didattica. L'utilizzazione di queste descrizioni per prendere decisioni sulla politica dell'insegnamento, curricula, leggi, organismi, senza conoscenze didattiche adeguate, porta a conseguenze disastrose. Porta inoltre gli insegnanti a incentrarsi sulle acquisizioni di saperi da parte degli allievi, trascurando il problema del mantenimento delle conoscenze, indispensabili alla genesi dei saperi stessi. Questa degenerazione dell'ambiente didattico causa alla fine un abbassamento

effettivo delle conoscenze e dei saperi degli allievi, che ri-alimenta il sistema di decisioni negative.

Da tutto ciò emerge la necessità di conoscere usi e necessità della conoscenza epistemologica da parte dell'insegnante; tuttavia esiste una epistemologia che si può chiamare (Speranza, 1997; Brousseau, 2006a)

Epistemologia spontanea degli insegnanti

Per prendere le loro decisioni in aula, gli insegnanti usano esplicitamente o implicitamente ogni tipo di conoscenze, di metodi e di convinzioni sul modo di trovare, di apprendere o di organizzare un sapere. Questo bagaglio epistemologico è essenzialmente costruito empiricamente per rispondere alle necessità didattiche. Questo, a volte, è il solo mezzo che permetta loro di proporre i processi didattici scelti e di farli accettare dai loro allievi e dal loro ambiente. L'insieme delle convinzioni degli insegnanti, degli allievi o dei genitori su ciò che conviene fare per insegnare, per apprendere e per comprendere i saperi in gioco, costituisce una *epistemologia* pratica che è impossibile ignorare ed eliminare. L'epistemologia filosofica o scientifica è lontana dal poter pretendere di assumere questo ruolo.

L'epistemologia spontanea fonda le sue radici su una pratica antica, dato che la tendenza a comunicare esperienze da una generazione alla successiva è caratteristica essenziale dell'umanità. Sarebbe assurdo opporla alle conoscenze scientifiche: occorre rispettarla, comprenderla e studiarla sperimentalmente, come un fenomeno "naturale".

L'utilità dell'introduzione dell'epistemologia e delle teorie scientifiche afferenti alla formazione degli insegnanti si presenta allora in un aspetto nuovo (D'Amore, 2004).

Ma, prima di proseguire, è necessario mostrare un esempio preciso del funzionamento di due tipi di epistemologia che abbiamo presentato. Lo faremo attraverso un esempio desunto da Brousseau (2006b).

3. La doppia costrizione delle situazioni didattiche

L'insegnante propone ai suoi allievi un problema che egli ritiene essere *analogo* ad un problema che aveva loro proposto precedentemente, ma nel quale essi avevano fallito. Egli spera che essi riconosceranno la similitudine e che utilizzeranno la correzione e le spiegazioni che egli ha dato per *riprodurre* lo stesso metodo di risoluzione, in modo da affrontare con successo la nuova situazione. Egli raccomanda dunque fortemente ai suoi allievi di cercare e di utilizzare questa analogia.

Questa procedura riesce, cioè ha successo agli occhi dell'insegnante. Ma essa costituisce in realtà una frode epistemologica. L'allievo produce una risposta esatta, ma non perché egli abbia compreso la sua necessità matematica o logica a partire dall'enunciato, non perché egli abbia "compreso e risolto il problema", non perché abbia appreso un oggetto matematico, ma semplicemente perché ha stabilito una somiglianza con un altro esercizio; egli non ha fatto altro che riprodurre una soluzione già fatta da altri per lui. Quel che è peggio, egli è consapevole che questa era la richiesta da parte dell'insegnante. Crederà d'aver compreso la questione matematica in gioco, mentre non ha fatto altro che interpretare un'intenzione didattica espressa esplicitamente dall'insegnante e fornire la risposta attesa.
Questo "abuso dell'analogia" che Guy Brousseau ha messo in evidenza fin dagli anni '70, ma sul quale si basano ancora oggi molte azioni didattiche in aula, è una delle forme più correnti di quello che lui stesso definì "effetto Jourdain", uno degli effetti del contratto didattico. L'insegnante ottiene la risposta attesa con mezzi che non hanno alcun valore e fa credere all'allievo (alla famiglia, alla istituzione) di aver compiuto un'attività matematica che era il traguardo da raggiungere.
L'attività dell'allievo deve rispondere dunque a due costrizioni incompatibili:

- quella determinata dalle condizioni a-didattiche che determinano una risposta originale e l'organizzazione di conoscenze specifiche;
- quella determinata dalle condizioni didattiche che hanno come scopo di far produrre la risposta attesa, indipendentemente dalla sua modalità di produzione.

Questo esempio mostra che se l'epistemologia e le scienze cognitive possono studiare, dare ragione, delle risposte degli allievi sotto la sola prima costrizione, esse non possono pretendere di aiutare gli insegnanti ignorando la seconda. Le costrizioni didattiche finiranno con l'opprimere le costrizioni cognitive. Esse trasformano la natura stessa delle conoscenze ed il loro funzionamento. L'insegnamento diventa così una simulazione della genesi delle conoscenze.
Tutto ciò spiega il perché della necessità di studi specifici, di didattica della matematica, che non possono ricondursi né a teorie dell'apprendimento né a studi esclusivamente epistemologici. Il contratto didattico, per la sua forza e per le sue caratteristiche straordinarie, sarà l'oggetto dei successivi esempi. Guy Brousseau ne

rivelò l’importanza alla comunità scientifica fin dagli anni ’60.

4. L’interpretazione di eventi d’aula alla luce di strumenti della ricerca didattica: l’esempio del contratto didattico

In una ricerca sui problemi con dati mancanti e sugli atteggiamenti degli allievi di fronte a problemi di questo tipo (D’Amore, Sandri, 1998) ecco un testo proposto in III primaria (allievi di 8-9 anni) ed in II media (allievi di 12-13 anni):
«Giovanna e Paola vanno a fare la spesa; Giovanna spende 10.000 lire e Paola spende 20.000 lire. Alla fine chi ha più soldi nel borsellino, Giovanna o Paola?».
Ed ecco un prototipo del genere di risposte più diffuse in III primaria; scelgo il protocollo di risposta di Stefania, che riporto esattamente come lo ha redatto l’allieva:

> Stefania:
>
> Nel borsellino rimane più soldi giovanna
> 30-10=20
> 10×10=100

Trattandosi di un “contratto”, da tempo rintraccio delle “costanti di comportamento” che si possono chiamare “clausole”;[6] nel caso in questione giocano un ruolo formidabile due di esse:
clausola delle attese: la maestra si aspetta certo una risposta, dunque devo fornirla, non importa il senso il testo;
clausola della costanza: la maestra ha *sempre* dato problemi con un testo scritto a parole e con dei numeri e, per produrre il risultato, ho *sempre* operato su quei numeri con delle operazioni; se è *sempre* andata così, dovrà per forza andare così *anche* questa volta.
La risposta “Giovanna” (58,4% di tali risposte in III primaria, età degli allievi 8-9 anni) è giustificata dal fatto che lo studente ritiene che, se l’insegnante affida un problema, questo *debba poter essere risolto*; dunque, anche se si accorge che manca il dato della somma iniziale, se lo inventa implicitamente più o meno come segue: «Questo problema *deve* essere risolto; dunque, forse Giovanna e Paola partivano dalla

---

[6] Per questa idea, che ho cominciato ad usare nei primi anni ’90 mi sono servito di Chevallard (1988) che, parlando di *metacontratto*, citava questo termine anche se in un altro senso.

stessa somma». A quel punto, *la risposta è corretta*: Giovanna spende meno e quindi le resta più danaro. E ciò giustifica la parte scritta della risposta di Stefania. Dopo di che scatta un altro meccanismo legato ad un'altra clausola (del tipo: immagine della matematica, attese presupposte da parte dell'insegnante): «Non può bastare così, in matematica si devono fare dei calcoli, la maestra se li aspetta di certo». A quel punto, il controllo critico crolla e... qualsiasi calcolo va bene.
Nel lavoro D'Amore, Sandri (1998), abbiamo chiamato questa clausola del contratto didattico: "esigenza della giustificazione formale" (egf), studiandola in ogni dettaglio (anche in lavori successivi). Tale clausola egf è molto presente anche nella scuola media (età degli allievi: 11-14 anni). [La percentuale di risposte "Giovanna" scende dal 58,4% della III primaria (8-9 anni) al 24,4% della II media (12-13 anni); ma solo il 63,5% degli allievi di II media denuncia in qualche modo l'impossibilità di dare una risposta; dunque il 36,7% dà una risposta: oltre 1/3 in media].
Ecco un prototipo di risposta avuta allo stesso problema in II media; ho scelto il protocollo di risposta di un'allieva, riportandolo esattamente come da lei prodotto:

> Silvia:
>
> Secondo me, chi ha più soldi nel borsellino è Giovanna
> perché:
> Giovanna spende 10.000 mentre Paola spende 20.000.,
> 10.000 20.00
> Giovanna Paola
> 20.000-10.000=10.000 (soldi di Giovanna)
> 10.000+10.000=20.000 (soldi di Paola)

Nel protocollo di Silvia si riconoscono in azione le stesse clausole del contratto didattico messe in opera nel protocollo di Stefania, ma la sua analisi è più complessa. Per prima cosa, si nota un tentativo di organizzazione logica e formale più impegnativo. Silvia, poi, dapprima scrive spontaneamente "Giovanna" senza fare alcun calcolo, perché ha ragionato come Stefania; poi, però, a causa della clausola egf, ritiene di *dover* produrre calcoli. È probabile che si renda conto, anche se in modo confuso, che le operazioni che sta facendo sono slegate dalla logica del problema, le fa solo perché ritiene di *dover fare* qualche calcolo. Ma, per quanto assurde, finisce con assumerle come fossero plausibili: tanto è vero che, dato che da questi calcoli insensati ottiene un risultato che contrasta con quello dato per via intuitiva, preferisce violentare la propria intuizione ed accetta piuttosto quanto ottenuto per via formale: i calcoli le danno "Paola" come risposta e non "Giovanna", come invece aveva supposto; e dunque barra "Giovanna" ed al suo posto scrive "Paola":

> Secondo me, chi ha più soldi nel borsellino è ~~Giovanna~~ Paola
> perché:
> Giovanna spende 10.000 mentre Paola spende 20.000.,
> 10.000 20.00
> Giovanna Paola
> 20.000-10.000=10.000 (soldi di Giovanna)
> 10.000+10.000=20.000 (soldi di Paola)

Il contratto didattico, che questa volta è dettato da una immagine formale (a vuoto, deleteria) della matematica, ha vinto, sconfiggendo la ragione...

In D'Amore (1993), racconto un'esperienza basata sul testo seguente, dato in una scuola primaria a diverse classi:
«I 18 allievi di seconda vogliono fare una gita di un giorno da Bologna a Verona. Devono tener conto dei seguenti dati:
- due di essi non possono pagare;
- da Bologna a Verona ci sono 120 km;
- un pulmino da 20 posti costa 200.000 lire al giorno più 500 lire al chilometro (compresi i pedaggi autostradali).

Quanto spenderà ciascun allievo?».
Inutile dire che si tratta di un problema complesso, che si voleva realmente effettuare la programmazione di una gita, che gli studenti avrebbero dovuto discutere del problema e cercare la risoluzione in gruppo eccetera.
Di fatto, la stragrande maggioranza degli studenti, di fronte alla risoluzione di questo problema, commette un errore ricorrente: non tiene conto del viaggio di ritorno e calcola dunque la spesa totale con l'espressione errata: $500\times120 + 200000$ in luogo di $(500\times120)\times2+200000$.

Su punti di questo tipo c'è una vasta bibliografia che tende a giustificare queste scelte. Una delle giustificazioni più ricorrenti è una sorta di… dimenticanza strategica o affettiva: l'andata di una gita è un momento emotivamente forte, il ritorno no.
Per cercare di capire meglio la questione, spezzai il problema in varie componenti o fasi, con tante "domande" parziali specifiche; ma l'errore si ripeteva. Suggerii allora ad alcuni insegnanti di far mimare le scene dell'andata e del ritorno, di disegnare i vari momenti della gita. Un caso interessante che riscontrai e che descrissi in D'Amore (1993) è quello di un bambino che ha disegnato il seguente cartello:

Bologna → Verona
120 Km

Verona → Bologna
120 Km

Dunque, c'è perfetta consapevolezza del fatto che in una gita ci sono andata e ritorno; ma poi quello stesso bambino, al momento di risolvere, utilizza di nuovo solo il dato per l'andata.
Una delle giustificazioni più presenti date dai bambini nelle interviste è che essi non si sentono autorizzati ad usare un dato che esplicitamente non appare nel testo. Conta poco il *senso della richiesta* contenuta nei problemi di matematica, quel che conta è far uso dei dati numerici esplicitamente proposti come tali. Uno dei bambini, intervistato, dichiara: «Se tu volevi calcolare anche il ritorno, dovevi dirlo»; è evidente la lacuna che il bambino avverte: in nessuno dei dati appare lecito raddoppiare la spesa per il percorso chilometrico. Il contratto didattico impone delle regole di comportamento e, come spiegava Brousseau, le costrizioni didattiche si impongono rispetto a quelle a-didattiche.

Risulta molto interessante leggere l'atteggiamento degli studenti di fronte al seguente celebre problema di Alan Schoenfeld (1987):
«Un bus dell'esercito trasporta 36 soldati. Se 1128 soldati devono essere trasportati in bus al campo d'addestramento, quanti bus devono essere usati?».
Dei 45000 allievi quindicenni testati negli USA da Schoenfeld, solo meno di un quarto (il 23%) è riuscito a dare la risposta attesa, cioè 32. Il

ricercatore statunitense afferma quindi che pochissimi studenti sono in grado di rileggere il senso della domanda, osando scrivere 32, di fatto non ottenuto formalmente nell'operazione, e propone come causa di questo comportamento questioni relative a fatti metacognitivi. La spiegazione di questo evento, secondo l'Autore sta in una lacuna nei processi metacognitivi, quindi nel fatto che gli studenti, una volta ottenuto il risultato numerico dopo un processo aritmetico di risoluzione del problema, non sono in grado di tornare sui propri passi, rileggere criticamente il testo, rendersi conto della effettiva richiesta, e interpretare il risultato ottenuto per dare la riposta corretta.
A distanza di alcuni anni, recentemente abbiamo voluto analizzare di nuovo la stessa situazione (D'Amore, Martini, 1997), intervistando gli allievi, cosa che Schoenfeld non fece, ed abbiamo trovato alcune novità. La prova è stata fatta a vari livelli scolastici aggiungendo una variabile, cioè lasciando libertà agli studenti di usare o no la macchina calcolatrice. Abbiamo avuto molte risposte del tipo: 31,333333 soprattutto da parte di chi usava la macchina calcolatrice; altre risposte: $31,\overline{3}$ e 31,3.
Il controllo semantico, quando c'è, porta qualcuno a scrivere 31 (gli autobus «non si possono spezzare»), ma ben pochi si sentono *autorizzati* a scrivere 32. Tra chi usa la macchina calcolatrice, poi, si ha lo 0% di risposte "32".
L'intervista mostra che lo studente non si sente autorizzato a scrivere quel che non appare: se anche fa un controllo semantico sugli autobus come oggetti non divisibili in parti, ciò non lo autorizza a scrivere 32; c'è addirittura chi non si sente autorizzato neppure a scrivere 31; non si può parlare semplicemente di "errore" da parte dello studente, a meno che non si intenda per errore l'incapacità di controllare, una volta ottenuta la risposta, se essa è semanticamente coerente con la domanda posta; ma allora scatta un altro meccanismo: lo studente non è disposto ad ammettere di aver fatto un errore e preferisce parlare di "trucco", di "trabocchetto"; per lo studente un errore matematico o in matematica, è un errore di calcolo o assimilabile ad esso, non accetta che si consideri errore una errata interpretazione semantica.
Un lungo e sistematico studio su questa prova, eseguito anche attraverso numerose interviste agli studenti, rivela che "il colpevole" di questo comportamento è una clausola del contratto didattico, alla quale abbiamo dato il nome di "clausola di delega formale". Lo studente legge il testo, decide l'operazione da effettuare ed i numeri con i quali deve operare; a

quel punto scatta, appunto, la clausola di *delega formale*: non tocca più allo studente ragionare e controllare, non considera più sua responsabilità personale quel che segue. Sia che faccia i calcoli a mano, *tanto più* se fa uso della calcolatrice, si instaura quella clausola che disimpegna le facoltà razionali, critiche, di controllo: l'impegno dello studente è finito ed ora tocca all'algoritmo o meglio ancora alla macchina, lavorare per lui. Il compito successivo dello studente sarà quello di trascrivere il risultato, qualsiasi cosa sia e non importa che cosa esso significhi nel contesto problematico di partenza.

Questo fatto spiega anche un altro evento didattico. È ben noto l'esempio di Efraim Fischbein (1985):
P1. Una bottiglia di aranciata, che contiene 0,75 *l*, costa 2 dollari. Qual è il prezzo di 1 *l* ?
P2. Una bottiglia di aranciata, che contiene 2 *l*, costa 6 dollari. Qual è il prezzo di 1 *l* ?
Se si dà da risolvere solo P1, celando alla vista P2, si noterà sempre tra i presenti un tempo di imbarazzo più o meno lungo. Dato poco dopo anche P2, molti saranno disposti ad ammettere con sincerità che, mentre il secondo problema si risolve immediatamente con la divisione 6:2, risolvere il primo con l'*analoga* divisione 2:0,75 crea forti imbarazzi.
Vediamo il commento che fa lo stesso Fischbein (1985): «Di conseguenza si può supporre che siano proprio i numeri e le relazioni tra essi a bloccare o a facilitare il riconoscimento dell'operazione di divisione come procedura risolutiva. Ogni operazione aritmetica possiede, oltre al suo *significato formale*, anche uno o più *significati intuitivi*. I due livelli possono coincidere oppure no».
[Una trattazione molto approfondita di analisi di questi e molti altri casi analoghi si trova in D'Amore (1999) ed in D'Amore (2003). Per questo, qui sorvolo].
Ho spesso provato a chiedere agli insegnanti ed agli studenti più maturi come avessero fatto a risolvere P1. Alcuni hanno confessato di aver considerato 0,75 come ¾ e di aver dunque proceduto nel campo delle frazioni (non operando sempre in modo ineccepibile). Altri hanno invece ammesso di aver risolto P1 con la proporzione 0,75:2=1:x e di aver poi applicato le note proprietà per risolvere (con successo). Ora, si badi bene, nel corso della risoluzione di questa equazione lineare nell'incognita x, c'è un momento in cui si *deve* fare 2:0,75, cioè

apparentemente la stessa operazione che, se eseguita direttamente sui dati del problema, avrebbe risolto P1 in un battibaleno. Ma non è la stessa cosa. Se è vero, com'è indiscutibilmente vero, che c'è una forte resistenza in moltissimi di noi ad eseguire direttamente 2:0,75 (a causa del contrasto tra significato formale e significato intuitivo della divisione), non c'è più alcun imbarazzo ad applicare le regole delle proporzioni ed a eseguire i *passaggi di un algoritmo*, quando questo arriva al momento finale di chiederci di eseguire *l'apparentemente stessa* operazione. Qui, come ormai sappiamo, scatta una clausola del contratto didattico, quella di *delega formale*: in un certo senso, non ci impegniamo più direttamente nel fare quel passaggio, non è più una questione di scelta, di decisione personale; si affida all'algoritmo, al calcolo, la risoluzione del problema, una sorta di deresponsabilizzazione del risolutore.[7]

Nel corso di una prova sulle capacità degli allievi di trovare le radici delle equazioni di II grado, l'insegnante ha proposto, tra le altre, l'equazione (x-1)(x-3)=0. Non era mai successo prima: le equazioni non erano mai state date sotto forma di prodotto di binomi ma nella loro forma canonica. Nella totalità della classe, gli studenti hanno interpretato la consegna come una costrizione determinata dalle condizioni didattiche che hanno come scopo di far produrre la risposta attesa, indipendentemente dalla sua modalità di produzione. Dunque, invece di rispondere immediatamente +1 e +3, hanno moltiplicato tra loro i due binomi giungendo all'equazione in forma canonica abituale, e fornendo solo allora le due radici attese +1 e +3. [Ovviamente, in diversi hanno sbagliato i calcoli, producendo radici del tutto diverse]. Questo comportamento, inutile insistere, si spiega benissimo con il contratto didattico.

5. Conclusione

Non vorrei aver dato l'idea che il contratto didattico agisca in aula solo su allievi giovani e nei bassi livelli di scolarità; abbondano esempi ad alti livelli, perfino all'università e perfino nei corsi per insegnanti di

[7] Su questo stesso tema, esiste un lavoro di Brousseau (1987); in una tavola a pagina 59, l'Autore analizza il problema seguente: Immaginiamo che si paghino 0,2 sterline per 0,75 litri. Afferma Brousseau che la divisione 0,2:0,75 risulta più sorprendente che non 2:0,75.

matematica, in formazione iniziale o in servizio (Fandiño Pinilla, 2005; Fandiño Pinilla, D'Amore, 2006). Si tratta dunque di uno strumento potente per analizzare gli eventi d'aula, uno dei tanti che ci sono stati regalati dallo studio appassionato e pluridecennale di Guy Brousseau, l'indubbio pioniere in questo campo.
Rispetto alle sue idee iniziali, evolutesi nel tempo, molti ricercatori si sono prodigati a trovare esempi e ad esplorare sempre più in profondità il concetto; così facendo, però, molti Autori hanno finito con l'interpretare in molti modi diversi l'idea originaria (Sarrazy, 1995).
Ciò non limita a mio avviso la portata dello strumento, anzi la amplifica mostrando, con un esempio duttile e di grande potenza, la forza degli studi che hanno cambiato la nostra comunità negli ultimi 40 anni.

Bibliografia[8]

Bachelard G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris, Vrin.
Brousseau G. (1965). *Les mathématiques du cours préparatoire*. Paris, Dunod.
Brousseau G. (1972). Processus de mathématisation. *La mathématique à l'école élémentaire*. 428-457.
Brousseau G. (1975). Exposé au colloque «L'analyse de la didactique des mathématiques» (13-15 marzo 1975). Rendiconti pubblicati dall'IREM di Bordeaux.
Brousseau G. (1976-1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In: Wanhamme W., Wanhamme J. (eds.) (1976). [Ripubblicato su. *Recherches en didactique des mathématiques*. 4, 2, 1983, 165-198].
Brousseau G. (1977); tra il 1970 ed il 1973 Guy Brousseau pubblicò diversi articoli nei quaderni dell'Irem di Bordeaux che avevano il nome di: «Compte-rendu du séminaire de recherches 1971-72 et projets pour 1972-73»; ma poi queste pubblicazioni continuarono fino al 1978. Io qui mi riferisco ad una di queste pubblicazioni a uso interno, la numero 18, nella sua versione edita a Barcellona nel 1977.
Brousseau G. (1980). Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laryngologie, otologie, rinologie*. 101, 3-4, 107-131.
Brousseau G. (1980). L'échec et le contrat. *Recherches en didactique des*

[8] Doverosamente e correttamente, nella bibliografia sono citati vari lavori pionieri di Guy Brousseau, molti dei quali oggi rintracciabili con estrema difficoltà, anche se non espressamente citati nel corso di questo articolo. Considero il mio come un modesto contributo alla ricostruzione storica tematica, un omaggio allo studioso francese.

mathématiques. 41, 177-182.
Brousseau G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques*. 2, 1, 37-127.
Brousseau G. (1982). À propos d’ingénierie didactique. Univ. de Bordeaux I, Irem. [Dattiloscritto].
Brousseau G. (1983), *Théorisation des phenomenes d’enseignements des mathématiques*. Tesi di Dottorato, Bordeaux.
Brousseau G. (1984). The crucial role of the didactical contract. *Proceedings of the TME 54.*
Brousseau G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7, 2, 33-115.
Brousseau G. (1987). Représentations et didactique du sens de la division. *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*. Actes du colloque de Sèvres, maggio 1987. Grénoble: La Pensée Sauvage. 47-67.
Brousseau G. (1988). Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège. *Petit x*. 21, 47-68.
Brousseau G. (1989). La tour de Babel. Études en didactique des mathématiques. 2. Irem de Bordeaux.
Brousseau G. (1989). Obstacles épistémologiques, conflicts socio-cognitifs et ingéniérie didactique. In: Bodnarz N., Garnier C. (eds.) (1989). *Les obstacles épistémologiques et le conflit socio-cognitif. Construction des savoirs (obstacles et conflits)*. Colloque internationale CIRADE, Université de Québec, Montreal.
Brousseau G. (1991). L’enjeu dans une situation didactique. Documents pour la formation des professeurs d’école en didactique des mathématiqyues. IREM de Paris VII. 147-163.
Brousseau G. (1994). Perspectives pour la didactique des mathématiques. In: Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavignot P. (eds.) (1994). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
Brousseau G. (1995). L’insegnamento di un modello dello spazio. In: Gallo E., Ferrari M., Speranza F. (eds.) (1995). *La ricerca in didattica della matematica: finalità, contenuti, esempi*. Quaderni CNR, n. 15. Pavia.
Brousseau G., Brousseau N. (1987). Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire. Bordeaux, Univ. de Bordeaux I, Irem.
Brousseau G., Centeno J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l’enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*. 11, 2-3, 167-210.
Brosseau G., Pères J. (1981). Le cas Gaël. Université de Bordeaux I, Irem.
Brousseau G. (2004). Les représentations: étude en théorie des situations. *Revue des Sciences de l’Éducation*. XXX, 2.
Brousseau G. (2006a). Epistemologia e didattica della matematica. *La*

matematica e la sua didattica. 4, 621-655.
Brousseau G. (2006b). Epistemologia e formazione degli insegnanti. In: Sbaragli S. (ed.) (2006). *La matematica e la sua didattica, venti anni di impegno*. Atti del Convegno internazionale omonimo. Castel San Pietro Terme, 23 settembre 2006. Bologna: Pitagora. 54-58. Pubblicato inoltre su: D'Amore B. (ed.) (2006). *Matematica: l'emergenza della didattica nella formazione*. Numero speciale monotematico di *Rassegna*. 29, 29-33.
Chevallard Y. (1988). *Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation*. Irem d'Aix-Marseille. 14.
Comenius J.A. [Komenský J.A.] (1657). *Didactica Magna*. Amsterdam. Si veda l'edizione: von Flitner A. (ed.) (1966). *Die große Didaktik*. Düsseldorf e München: Helmut Küpper.
D'Amore B. (1993). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. Progetto Ma.S.E., vol. XA. Milano: Angeli. Prefazione di G. Vergnaud. [II edizione 1996]. [In lingua spagnola: Madrid: Editorial Sintesis, 1997, trad. di F. Vecino Rubio]. Esiste una edizione più aggiornata sulla stessa tematica: D'Amore B. (2003). *Problemi di matematica nella scuola primaria*. Bologna: Pitagora.
D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica.* Bologna: Pitagora. Edizione in lingua spagnola con aggiunte e integrazioni: D'Amore B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Magisterio. Edizione in lingua portoghese: in corso.
D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. Edizione in lingua spagnola: D'Amore B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógica, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*. Barcelona e México DF: Reverté – Cinvestav. Edizione in lingua portoghese: D'Amore B. (2005). *Epistemologia e didáctica da matemática*. São Paulo: Escrituras.
D'Amore B. (2004). Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*. 4, 4-30. In lingua spagnola (2004): El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria. *Epsilon*. 60, 20, 3, 413-434.
D'Amore B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica.* 3, 325-336.
D'Amore B., Fandiño Pinilla MI. (2002). Un acercamiento analitico al "triángulo de la didáctica". *Educación Matemática*. México DF, México. 14, 1, 48-61.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti

di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. 3, 27-50. 30. In lingua spagnola (2004): Cambios de convicciones en futuros profesores de matemática de la escuela secundaria superior. *Espilon*. 58, 20, 1, 25-43. [534]

D’Amore B., Godino D.J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 9-38.

D’Amore B., Godino D.J., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.

D’Amore B., Martini B. (1997). Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard. *La matematica e la sua didattica*. 2, 150-175. In lingua spagnola (1997): *Números*, 32, 26-32. In lingua francese: *Scientia Paedagogica Experimentalis*, XXXV, 1, 95-118. In lingua inglese in: Gagatsis A. (ed) (1999). *A multidimensional approach to learning in mathematics and science*. Nicolsia: Intercollege. 3-24.

D’Amore B., Sandri P. (1998). Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-18. In lingua francese (1998): *Scientia Paedagogica Experimentalis*, XXXV, 1, 55-94.

Fandiño Pinilla M.I. (2005). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla M.I., D’Amore B. (2006). *Area e perimetro, aspetti concettuali e didattici*. Trento: Erickson.

Fischbein E. (1985). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In: Chini Artusi L. (ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna, Zanichelli-UMI. 122-132.

Sarrazy B. (1995). Le contrat didactique. *Revue française de pédagogie*, 112, 85-118. In lingua italiana (1998): *La matematica e la sua didattica*. 2, 132-175.

Sarrazy B. (1996). *La sensibilité au contrat didactique: rôle des arrière-plans dans la résolution de problèmes arithmétiques au cycle trois*. Tesi di dottorato. Università di Bordeuax II.

Sarrazy B. (1997). Sens et situations: une mise en question de l’enseignement des stratégies métacognitives en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 17, 2, 135-166.

Sarrazy B. (2002). Effects of variability of teaching on responsiveness to the didactic contract in arithmetic problem solving among pupils of 9-10 years. *European Journal of Education*. XVII, 4, 321-341.

Schoenfeld A.H. (1987). What’s all the fuss about metacognition? In: Schoenfeld A.H. (ed.) (1987b). *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale (N.J.): Lawrence Erlbaum Ass. 189-215.

Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora.

Parole chiave: Epistemologia della didattica, pratiche di insegnamento, contratto didattico, opera di Brousseau, triangolo e poligoni della didattica.